**CHUYÊN ĐỀ: HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**A. MỘT SỐ DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**Dạng 1: Hệ bậc nhất hai ẩn**

A. Kiến thức cần nhớ

Bài toán: Giải hệ phương trình 

Trong đó  là các biểu thức chứa  và 

a) Phương pháp thế:

+ Đặt điều kiện (nếu có)

+ Biểu diễn một ẩn số theo ẩn số còn lại từ 1 phương trình

+ Thay vào phương trình còn lại, ta được phương trình 1 ẩn số

+ Giải phương trình 1 ẩn số này ta tìm được nghiệm

+ So sánh với điều kiện của bài toán rồi kết luận.

b) Phương pháp cộng đại số



+ Đặt điều kiện

+ Nhân hoặc chia các phương trình với hệ số thích hợp

+ Cộng đại số các phương trình trên, giải phương trình này

+ Tìm được nghiệm

+ So sánh với điều kiện rồi kết luận.

**Bài 1:**

Xác định các hệ số  của hàm số  để:

a. Đồ thị của nó đi qua hai điểm  .

b. Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

**Lời giải:**

a. Thay tọa độ các điểm  vào phương trình của đường thẳng ta được:



Vậy 

b. Tương tự phần (1) ta có hệ: 

Vậy .

**Bài 2:**

Giải các hệ phương trình sau:

a.  b.  c. 

**Lời giải:**

a. Đặt . Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:



Từ đó suy ra: .

b. Đặt . Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:



Từ đó suy ra: .

c. Điều kiện . Đặt  ta có hệ phương trình mới

.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất .

**Bài 3:**

Giải các hệ phương trình sau**:**

a.  b.  c. 

**Lời giải:**

a. Điều kiện: . Ta viết lại hệ phương trình thành:



Từ  thay vào ta tìm được . Vậy hệ phương trình có nghiệm là

.

b. Điều kiện . Ta nhân phương trình thứ nhất của hệ với 2 thì thu được:

, cộng hai phương trình của hệ mới ta có: . Với  thay vào phương trình ban đầu của hệ ta có:



Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: 

c. Điều kiện , ta viết lại hệ thành: 

Cộng 2 phương trình của hệ ta thu được:  thay

Vào ta tìm được:  thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm .

**Bài 4:**

Giải các hệ phương trình sau**:**

a.  b.  c. 

**Lời giải:**

a. Điều kiện . Ta viết lại hệ phương trình thành:

, cộng 2 phương trình của hệ thu được:



Suy ra  thay vào phương trình thứ 2 ta tìm được: .

Vậy hệ có nghiệm là .

b. Điều kiện: , ta viết hệ lại dạng:



Suy ra  thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ có nghiệm .

c. Đặt  (với ). Hệ đã cho trở thành

Phương trình (2) có dạng 

+ Với  thay vào PT (1) tìm được . Ta có hệ phương trình  nên  là nghiệm của phương trình, tức là .

+ Với  thay vào PT (1) tìm được . Ta có hệ phương trình 

nên  là nghiệm của phương trình , tức là .

Từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm.

**Bài 5:**

Giải các hệ phương trình sau**:**

a.  b. 

**Lời giải:**

a. Điều kiện: . Ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành:



Vậy hệ phương trình có nghiệm là .

b. Điều kiện: , hệ phương trình được viết lại thành:

 (TMĐK)

Vậy hệ có nghiệm là  .

**Bài 6:**

Cho hệ phương trình: 

a. Giải hệ phương trình với .

b. Tìm  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  trong đó  trái dấu.

c. Tìm  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  thỏa mãn .

**Lời giải:**

a. Với  ta có hệ phương trình: 

b. Từ phương trình (1) ta có . Thay  vào phương trình (2) ta được:



Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với:

. Từ đó ta được: .

Ta có: . Do đó  (thỏa mãn điều kiện).

c. Ta có: 

Từ (4) suy ra . Với điều kiện  ta có:

. Vậy .

**Bài 7:** *Chuyên Toán Quảng Nam, năm học 2012*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

+ Nếu  không thỏa mãn phương trình (2) (loại)

+ Nếu 

Thay vào phương trình (1) ta được:





+) TH1: 

+) TH2:  nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm 

**Bài 8:** *Chuyên Toán Bắc Ninh, năm học 2011*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có hệ phương trình 



Giải phương trình (2): 

+) TH1: 

+) TH2: 

Vậy HPT có hai nghiệm 

**Bài 9:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

HPT 

Thế (4) vào (3) ta được 



+) TH1:  vô lý

+) TH2: 

Vậy PHT có nghiệm 

**Bài 10:** *Chuyên KHTN, năm học 2018*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có HPT 

Thế (4) vào (3) ta được: 



+) TH1: 

+) TH2: 

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm 

**Bài 11:** Thế ẩn

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Từ 



Thay vào (3) ta được: 





Vậy hệ phương trình có nghiệm .

**Bài 12:** HSG TPHN

Giải hệ phương trình sau  (thế hệ số)

**Lời giải**

Thế  vào phương trình (2) ta có:

 (\*)

+) Xét  (không thỏa mãn)

+) Xét , chia cả 2 vế của phương trình (\*) cho  ta được:



Đặt 

Với  thay vào phương trình (1) 

Vậy hệ phương trình có nghiệm 

**Bài 13:** HSG TPHCM, năm học 2015

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

(Điều kiện chặt )

Thế (1) vào (2) ta được: 





Điều kiện: 

Ta có 



 (thỏa mãn).

**Bài 14:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có: 



+) Với  thay vào (1) 

+) Với  thay vào (1) 

Vậy HPT có nghiệm .

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1:**

Cho hệ phương trình: 

a. Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của  thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b. Giải và biện luận hệ phương trình trên theo .

c. Tìm số nguyên  sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất  mà  đều là số nguyên.

d. Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất  thì điểm luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

e. Tìm  để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

a. Từ phương trình (2) ta có . Thay vào phương trình (1) ta được:



Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là

.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

.

b. Từ phương trình (2) ta có . Thay vào phương trình (1) ta được:



**Trường hợp 1:** . Khi đó hệ có nghiệm duy nhất



**Trường hợp 2:** **.** Khi đó phương trình (3) thành: . Vậy hệ có vô số nghiệm dạng .

**Trường hợp 3:**  khi đó phương trình (3) thành:  (3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi .

Ta có: . Vậy nguyên khi và chỉ khi  nguyên. Do đó  chỉ có thể là . Vậy  (thỏa mãn) hoặc  (loại).

Vậy  nhận các giá trị là .

d. Khi hệ có nghiệm duy nhất  ta có: 

Vậy điểm  luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình .

e. Khi hệ có nghiệm duy nhất  theo (d) ta có: . Do đó:



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: .

Vậy với  thì  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Chú ý:** Ta cũng có thể tìm quan hệ  theo cách khác: Khi hệ phương trình

 có nghiệm duy nhất  lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ ta thu được: .

**Bài 2:**

Cho hệ phương trình: . Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi  là một cặp nghiệm của phương trình.

Chứng minh: .

**Lời giải:**

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có  thay vào phương trình (1) của hệ ta có: . Do  với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất . Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi .

Gọi  là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có: . Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất với, phương trình thứ hai với  rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được: .

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng  luôn đi qua điểm cố định:  và đường thẳng  luôn đi qua điểm cố định: . Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng  và đường thẳng  vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng thì tam giác  vuông tại . Gọi  là trung điểm của  thì  suy ra:



**Bài 3:**

Cho hệ phương trình: 

Hệ có nghiệm duy nhất , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a. 

b. 

**Lời giải:**

Từ phương trình (2) ta suy ra: . Thay vào phương trình (1) ta được:



Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: .

Khi đó 

a. Ta có: 

 khi .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  bằng 3.

b. Ta có: 

Đặt 

Khi đó 



Vậy giá trị nhỏ nhất của  bằng 2.

**Bài 4:**

Cho hệ phương trình: .

Chứng minh hệ luôn có nghiệm duy nhất  và tìm GTLN của biểu thức  (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán – ĐHSP Hà Nội 2015).

**Lời giải:**

Xét hai đường thẳng 

+ Nếu  thì và  suy ra luôn vuông góc với .

+ Nếu  thì  và  suy ra  luôn vuông góc với .

+ Nếu  thì đường thẳng  lần lượt có hệ số góc là:  suy ra  do đó .

Tóm lại với mọi m thì hai đường thẳng  luôn vuông góc với . Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng  luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Gọi giao điểm là  đường thẳng  đi qua  cố định, đường thẳng luôn đi qua  cố định suy ra  thuộc đường tròn đường kính . Gọi  là trung điểm  thì .



Hay . Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

**Bài 5:** *Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Trà Vinh, năm 2009 – 2010*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải:**

Từ phương trình (1) ta có:  thế vào phương trình (2) ta được:



* ***Trường hợp 1.*** Xét 

Phương trình   (thỏa mãn)

Từ (1), suy ra: 

* ***Trường hợp 2.*** Xét 

Phương trình 

Từ (1), suy ra: 

* ***Trường hợp 3.*** Xét 

Phương trình  (thỏa mãn)

Từ (1) suy ra 

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  là:

**Bài 6:** *Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, Đại học Vinh, năm học 2015 – 2016*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải:**

Ta có: 

***Trường hợp 1.*** Xét 

***Trường hợp 2.*** Xét 

Từ phương trình (1) ta có  thế vào phương trình (2), ta được:



Với 

Với 

Vậy tập nghiệm  của hệ phương trình là:





**Dạng 2: Hệ đối xứng loại 1**

A. Kiến thức

\*) Định nghĩa: Hệ đối xứng loại 1 là hệ khi đổi chỗ  và  cho nhau thì mỗi phương trình vẫn không thay đổi

Xét bài toán: Giải HPT 

Hệ đối xứng loại 1 là hệ thỏa mãn 

Ví dụ: 

Cách giải:

+ Đặt điều kiện (nếu có)

+ Đặt , ta biến đổi hệ phương trình về HPT ẩn  và 

+ Giải HPT ẩn  và , từ đó tìm được  và 

+ Tìm  và  theo Viét đảo và kết luận.

\*) Lưu ý:

+ Thực hiện 1 số phép biến đổi

+ 

+ Đặt ẩn phụ.

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Đặt 

Thay vào hệ phương trình ta được: 

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ phương trình

Vậy hệ phương trình có nghiệm 

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có HPT 

Đặt  ta được: 



Vậy hệ phương trình có nghiệm 

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có HPT 

Đặt 

+) TH1: 

Vậy tập nghiệm  là 

+) TH2: Tương tự trường hợp 1.

**Bài 4:** *Chuyên PBC Nghệ An, năm học 2011*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

HPT 

Đặt 

Từ phương trình (2) ta có:





Đặt 

+) 

+) 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Đặt 

Đặt 

HPT 

Vậy HPT có nghiệm duy nhất 

Cách khác: Có thể đặt 

**Bài 6:** *Chuyên Hưng Yên, năm học 2018*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

HPT 

Đặt 

HPT 

+) 

+) 

Vậy HPT có hai nghiệm 

**Bài 7:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Đặt 



Phương trình 

  (T/M).

**Bài 8:** *Chuyên Bình Phước, năm học 2018*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có 

Đặt 

+) TH1: 

- 

-  (vô nghiệm)

+) TH2: 

- 

- 

Vậy HPT có 6 nghiệm.

**\*) Ứng dụng của HPT đối xứng loại 1**

Đặt ẩn phụ đưa phương trình về HPT đối xứng loại 1

Phương trình dạng: 

Cách giải: Đặt 

Ta có HPT 

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Đặt 

Ta có HPT 



Vậy  là nghiệm của phương trình.

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có HPT 

Đặt 



Vậy HPT có nghiệm 

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:**

Giải các hệ phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải:**

a) Đặt  điều kiện 

Hệ phương trình đã cho trở thành: 



Suy ra  là hai nghiệm của phương trình: 



b) Đặt  điều kiện  hệ phương trình đã cho trở thành:

 .

Suy ra  là hai nghiệm của phương trình: 

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm 

c) Đặt  hệ đã cho trở thành: .

Đặt  điều kiện  thì hệ đã cho trở thành.

.

Suy ra  là 2 nghiệm của phương trình:



Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm 

d) Điều kiện: . Đặt  điều kiện 

Hệ phương trình đã cho trở thành: 

.

Vậy hệ đã cho có nghiệm .

**Bài 2:**

Giải các hệ phương trình sau

a)  b) 

c)  d)

**Lời giải**

a) Đặt  điều kiện .

Hệ phương trình trở thành: .

Ta viết lại hệ phương trình thành: 

Đặt  điều kiện  thì hệ đã cho trở thành.



Ngoài ra ta cũng có thể giải ngắn gọn hơn như sau: 



Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất 

b) Điều kiện: .

Biến đổi phương trình (1):



Đặt  ta có phương trình: 

.

Vì  suy ra . Do đó 

Với  thay vào (2) ta được: 

Xét(không thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm .

c) Điều kiện: .

Hệ đã cho tương đương: .

Đặt 

Hệ trở thành: . .

Vậy hệ đã cho có nghiệm: .

d) Hệ tương đương với : .

Đặt . Ta thu được hệ:

.

TH1: 

TH2: .

Vậy hệ có nghiệm: .

**Dạng 3: Hệ đối xứng loại 2**

A. Kiến thức

\*) Định nghĩa: Hệ đối xứng loại 2 là hệ gồm 2 phương trình mà khi ta thay x bởi y và y bởi x thì phương trình trên trở thành phương trình dưới và phương trình dưới trở thành phương trình trên

Bài toán: Giải hệ phương trình đối xứng loại 2 

Ví dụ: 

Giải bài toán:

+ Tìm điều kiện (Đối với biểu thức chứa căn, chứa phân thức,.....)

+ Lấy phương trình (1) trừ theo vế cho phương trình (2), khi đó ta sẽ được kết quả:



+ Xét các trường hợp:

- Nếu  thay vào phương trình (1) hoặc phương trình (2)

+ Nếu . Kết hợp với (1) và (2) ta tìm được điều kiện

+ So sánh với điều kiện và kết luận.

B. Bài tập áp dụng

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Trừ vế tương ứng của 2 phương trình trên, ta có:





+) TH1: 

+) TH2: 

Vậy hệ phương trình có nghiệm  hoặc 

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Trừ từng vế hai phương trình cho nhau ta được:



+) Nếu  (không thỏa mãn)

+) Nếu  (thỏa mãn)

Với , liên hợp ta có: 





+) TH1: Với , thay vào phương trình (\*) ta được:



Vì , mà 

Thử lại ta thấy thỏa mãn

+) TH2: Ta có  phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy 

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Trừ từng vế hai phương trình ta được: 



+) TH1: 



+) TH2: 

Có 

Tương tự ta có  và 

Tương tự ta có 

Vậy  vô nghiệm.

Vậy 

**Bài 4:** *Chuyên Bình Phước, năm học 2018*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Lấy (1) – (2) theo từng vế ta được:



+ Nếu 

+ Nếu 

Vậy HPT có 4 nghiệm.

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Lấy (1) – (2) ta được:



Nhận thấy 

Từ đó , thay vào (1) ta được 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 6:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Từ (1)  thỏa mãn phương trình (2)

Vậy 

Cách 2: Đặt 

Ta được 

Cách 3: Đặt 

Ta được 

Lấy 



**\*) Ứng dụng của hệ đối xứng loại 2**

1. Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình đối xứng loại 2

Xét phương trình dạng: 

Cách giải: Đặt  ta có hệ phương trình 

**Bài 1:**

Giải phương trình sau:

1) 

2) 

**Lời giải**

1) Đặt 

Từ giải thiết 

Có 

Từ (1) và (2) ta có HPT 

Lấy (3) – (4) ta được: 

Thay  vàp phương trình (1) ta được



2) Ta phải đưa được về dạng: 

Điều kiện: 

Ta có phương trình 





Thay vào (1) ta được: 

Trừ (2) cho (3) ta được: 

Xét 2 trường hợp và thử lại ta được nghiệm của phương trình.

2. Hệ gần đối xứng (trong hệ phương trình có 1 phương trình đối xứng, phương trình còn lại không đối xứng)

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình sau: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



+) Thay (3) vào (2) ta được: 

+) Từ  thay vào (2): 

 (vô nghiệm).

**Bài 3:**

Giải các hệ phương trình sau:

a)  b) 

c) 

**Lời giải:**

a) Điều kiện: . Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:





Vì 

nên phương trình đã cho tương đương với: .

Hay 

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm: 

b) Hệ đã cho 

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:





+ Nếu  thay vào hệ ta có: 

+ Nếu .

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

. Đặt 

Ta có: 

Trường hợp 1: 

Trường hợp 2:  vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: 

c) Điều kiện: 

Để ý rằng  không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp 

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:



****

Khi  xét phương trình: 



Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: 